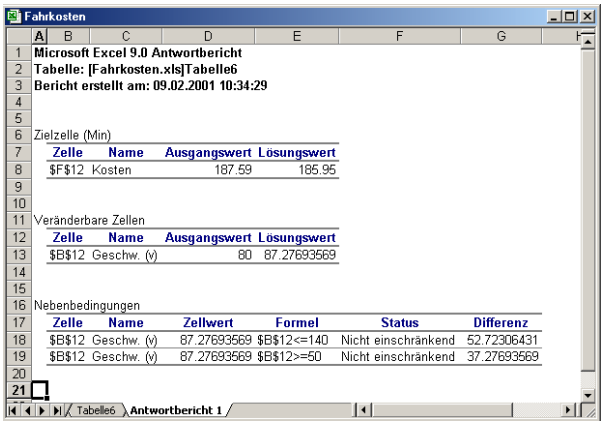
Der Solver

Excel verfügt über eine Reihe von äusserst effektiven Zusätzen, die erstaunlicherweise wenig bekannt und damit auch wenig genutzt werden. Einer dieser nützlichen Helver ist der Solver.

Der **Solver** (englisch *to solve* = *lösen* von Problemen) ist ein vielfältig nutzbares Werkzeug zur Lösung von Aufgaben, die in der Regel in einem System mathematischer Gleichungen zusammengefasst werden können.

Bevor wir aber die Anwendung des Solvers näher untersuchen, befassen wir uns mit einfacheren Methoden, die in erster Linie das Prinzip veranschaulichen sollen, nach dem letztlich auch der Solver die Aufgaben zu lösen versucht.



Fahrkosten

Microsoft Excel 9.0 Antwortbericht
Tabelle: [Fahrkosten.xls]Tabelle6
Bericht erstellt am: 09.02.2001 10:34:29

Zielzelle (Min)

Zelle	Name	Ausgangswert	Lösungswert
F12	Kosten	187.59	185.95

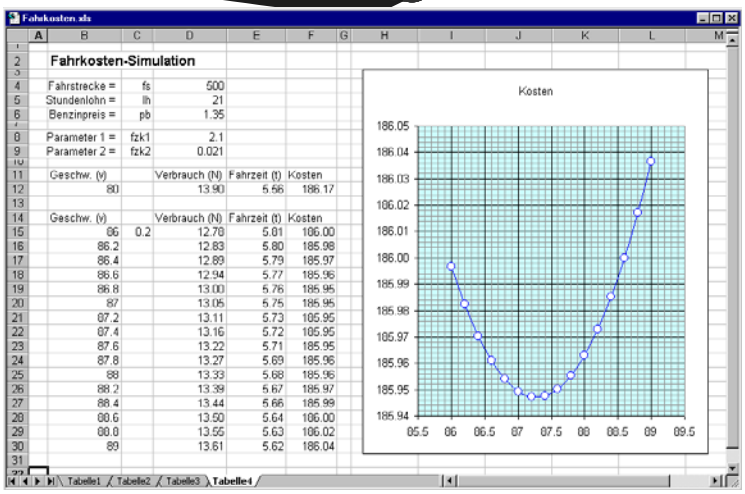
Veränderbare Zellen

Zelle	Name	Ausgangswert	Lösungswert
B12	Geschw. (v)	80	87.27693569

Nebenbedingungen

Zelle	Name	Zellwert	Formel	Status	Differenz
B12	Geschw. (v)	87.27693569	B12<=140	Nicht einschränkend	52.72306431
B12	Geschw. (v)	87.27693569	B12>=50	Nicht einschränkend	37.27693569

Tabelle6 / Antwortbericht 1



Fahrkosten-Simulation

Fahrstrecke =	fs	500
Stundenlohn =	lh	21
Benzinpreis =	pb	1.35
Parameter 1 =	fzk1	2.1
Parameter 2 =	fzk2	0.021

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
80		13.90	5.56	186.17

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
86	0.2	12.78	5.81	186.00
86.2		12.83	5.80	185.98
86.4		12.89	5.79	185.97
86.6		12.94	5.77	185.96
86.8		13.00	5.76	185.95
87		13.05	5.75	185.95
87.2		13.11	5.73	185.95
87.4		13.16	5.72	185.95
87.6		13.22	5.71	185.95
87.8		13.27	5.69	185.96
88		13.33	5.68	185.96
88.2		13.39	5.67	185.97
88.4		13.44	5.66	185.99
88.6		13.50	5.64	186.00
88.8		13.55	5.63	186.02
89		13.61	5.62	186.04

Tabelle1 / Tabelle2 / Tabelle3 / Tabelle4

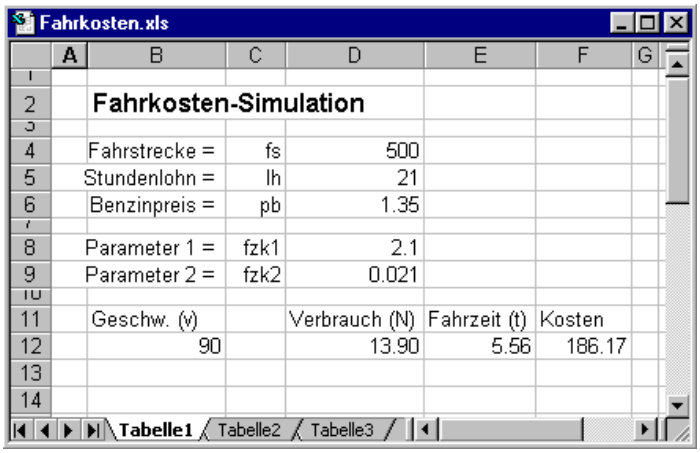
Kostenoptimierung

Bei unserem ersten Beispiel gehen wir davon aus, dass die Kosten für einen Autotransport optimiert werden soll.

Die Fahrstrecke und der Stundenlohn des Fahrers sind gegeben. Einsparungen versprechen wir uns von einer ökonomischen Fahrweise.

Bekanntlich nimmt der Benzinverbrauch bei hoher Geschwindigkeit erheblich zu. Auf der andern Seite verlängert sich bei einer tieferen Geschwindigkeit die Fahrzeit, und damit der Lohn des Fahrers.

Es muss also eine Geschwindigkeit geben, bei der die Fahrkosten am günstigsten ausfallen.



Fahrkosten.xls

Fahrkosten-Simulation

Fahrstrecke =	fs	500
Stundenlohn =	lh	21
Benzinpreis =	pb	1.35
Parameter 1 =	fzk1	2.1
Parameter 2 =	fzk2	0.021

Geschw. (v)	Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
90	13.90	5.56	186.17

Tabelle1 / Tabelle2 / Tabelle3

Verbrauch:

$$N = fzk1 \cdot \exp(fzk2 \cdot v)$$

Fahrtdauer:

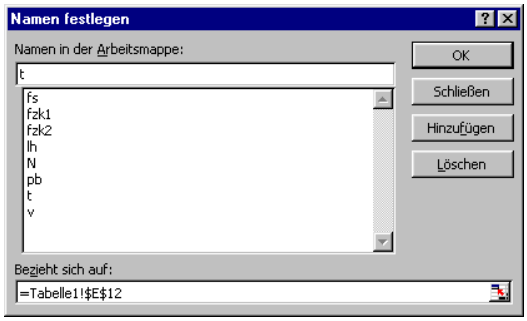
$$t = fs / v$$

Kosten

$$K = \frac{N \cdot fs}{100} + t \cdot pb$$

Wir erstellen ein Tabellblatt für alle erforderlichen Eingaben und Berechnungen. Auf die Bedeutung der Formeln soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Wenn wir den Datenzellen Namen geben müssen wir in Kauf nehmen, dass z.B. s für Strecke oder P1 für Parameter 1 nicht zulässig sind, weil diese für die Zellenadressierung reserviert sind.



Namen festlegen

Namen in der Arbeitsmappe:

t

fs
fzk1
fzk2
lh
N
pb
t
v

OK
Schließen
Hinzufügen
Löschen

Bezieht sich auf:

=Tabelle1!E12

Wo liegt das Minimum

Das bestehende Tabellenblatt berechnet die Kosten für eine bestimmte Geschwindigkeit. Wollten wir damit das Minimum bestimmen, müssten wir mühsam unterschiedliche Werte für die Geschwindigkeit eingeben.

Eleganter ist aber, wenn wir die Kostenberechnung in Form einer Tabelle durchführen, bei der die Geschwindigkeit frei wählbar ist.

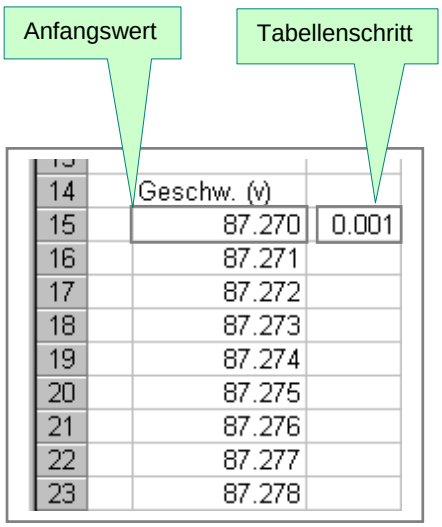
In der nebenstehenden Tabelle kann in Zelle B15 der Anfangswert und in Zelle C15 der Tabellen-Schritt eingetragen werden. Die Rechenvorschrift in B16:

B16: **=B15+C$15**

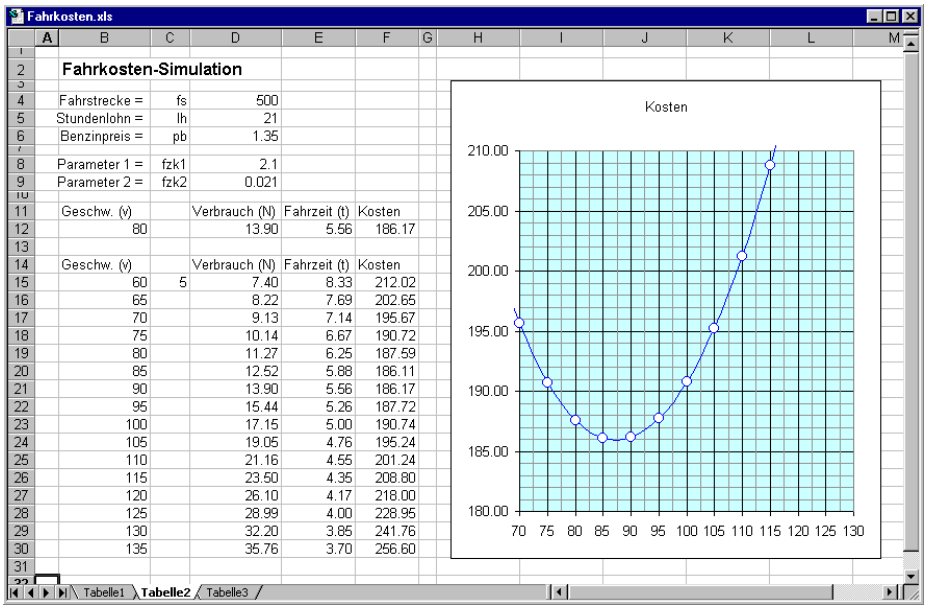
kann nach unten ausgefüllt werden.

Hilfreich ist auch hier die grafische Darstellung der Kosten in Funktion der Geschwindigkeit. Dazu verwenden wir ein xy-Diagramm.

Zusammen mit dem Diagramm können wir leicht ermitteln, in welchem Bereich das gesuchte Minimum liegen muss, um dann den Anfangswert und den Tabellenschritt entsprechend anzupassen.



Auf unser Beispiel bezogen gibt die damit erreichte Genauigkeit wenig Sinn. Es geht hier ja lediglich darum, das Prinzip der Iteration, also der schrittweisen Annäherung anschaulich darzustellen und praktisch um zu setzen.



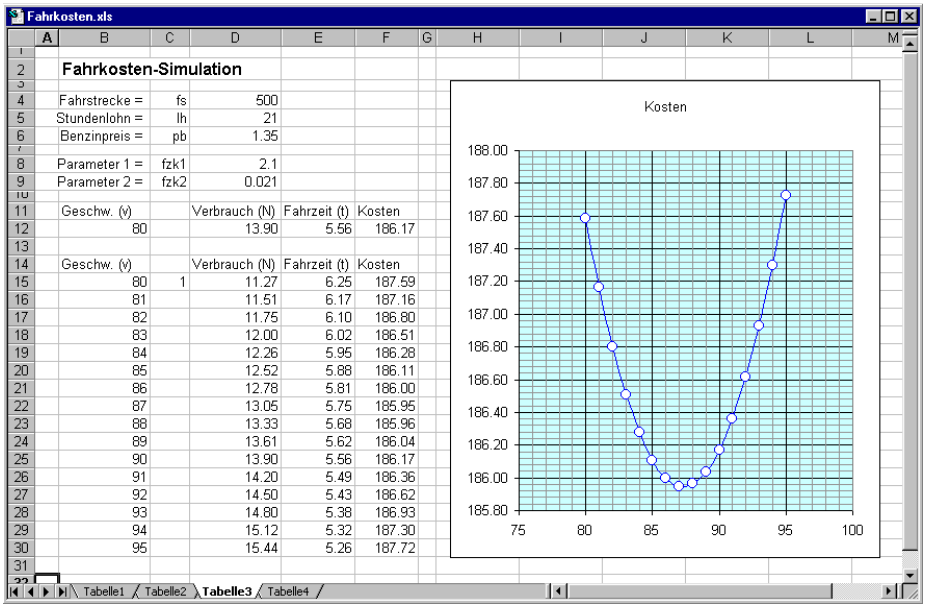
Fahrkosten.xls

Fahrkosten-Simulation

Fahrstrecke =	fs	500
Stundenlohn =	lh	21
Benzinpreis =	pb	1.35
Parameter 1 =	fzk1	2.1
Parameter 2 =	fzk2	0.021

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
80		13.90	5.56	186.17

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
60	5	7.40	8.33	212.02
65		8.22	7.69	202.65
70		9.13	7.14	195.67
75		10.14	6.67	190.72
80		11.27	6.25	187.59
85		12.52	5.88	186.11
90		13.90	5.56	186.17
95		15.44	5.26	187.72
100		17.15	5.00	190.74
105		19.05	4.76	195.24
110		21.16	4.55	201.24
115		23.50	4.35	208.80
120		26.10	4.17	218.00
125		28.99	4.00	228.95
130		32.20	3.85	241.76
135		35.76	3.70	256.60



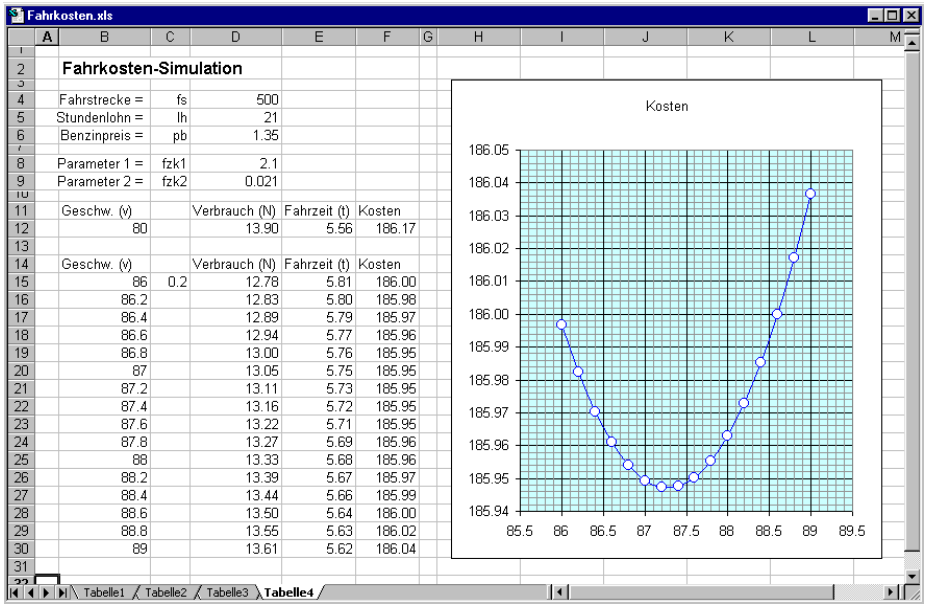
Fahrkosten.xls

Fahrkosten-Simulation

Fahrstrecke =	fs	500
Stundenlohn =	lh	21
Benzinpreis =	pb	1.35
Parameter 1 =	fzk1	2.1
Parameter 2 =	fzk2	0.021

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
80		13.90	5.56	186.17

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
80	1	11.27	6.25	187.59
81		11.51	6.17	187.16
82		11.75	6.10	186.80
83		12.00	6.02	186.51
84		12.26	5.95	186.28
85		12.52	5.88	186.11
86		12.78	5.81	186.00
87		13.05	5.75	185.95
88		13.33	5.68	185.96
89		13.61	5.62	186.04
90		13.90	5.56	186.17
91		14.20	5.49	186.36
92		14.50	5.43	186.62
93		14.80	5.38	186.93
94		15.12	5.32	187.30
95		15.44	5.26	187.72



Fahrkosten.xls

Fahrkosten-Simulation

Fahrstrecke =	fs	500
Stundenlohn =	lh	21
Benzinpreis =	pb	1.35
Parameter 1 =	fzk1	2.1
Parameter 2 =	fzk2	0.021

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
80		13.90	5.56	186.17

Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten
86	0.2	12.78	5.81	186.00
86.2		12.83	5.80	185.98
86.4		12.89	5.79	185.97
86.6		12.94	5.77	185.96
86.8		13.00	5.76	185.95
87		13.05	5.75	185.95
87.2		13.11	5.73	185.95
87.4		13.16	5.72	185.95
87.6		13.22	5.71	185.95
87.8		13.27	5.69	185.96
88		13.33	5.68	185.96
88.2		13.39	5.67	185.97
88.4		13.44	5.66	185.99
88.6		13.50	5.64	186.00
88.8		13.55	5.63	186.02
89		13.61	5.62	186.04

Das Minimum bestimmen und anzeigen

Bei der vorgeschlagenen Lösung müssen wir bei jeder neuen Berechnung aus der Tabelle den tiefsten Kostenwert und die entsprechende Geschwindigkeit ablesen. Ob an dieser Stelle das Minimum bereits überschritten wurde, können wir nicht mit Sicherheit feststellen. Darum wählen wir als neuen Anfangswert den vorangehenden Wert, der dann in jedem Falle noch vor dem Kostenminimum liegen muss.

Das Aufsuchen des momentanen Minimalwertes ist natürlich sehr mühsam. Einfacher wird es, wenn wir den Funktionsverlauf noch in einem dynamischen Diagramm überprüfen können.

Aber auch hier bietet Excel eine sehr praktische Funktion an, die es zu Nutzen gilt. Mit der Anweisung:

F32: **=MIN(F15:F30)**

wird aus der Spalte *Kosten* der **kleinste** Wert ermittelt und angezeigt. Und damit wir diesen Wert nicht selber suchen müssen, lassen wir die betreffende Stelle anzeigen. Dazu schreiben wir in die Zelle G15 die Anweisung:

G15: **=WENN(F15=F$32;“*“; “ “;)**

und füllen sie nach unten aus.

Nun wird also jeder Wert in der Spalte F (F15:F30) mit dem Wert in Zelle F32, also dem Minimalwert verglichen. Stimmen die beiden Werte überein, so setzen wir in die benachbarte Zelle ein Zeichen, z.B. ein Stern (*). Stimmen die beiden Werte nicht überein, so tragen wir ein (unsichtbares) Leerzeichen ein.

Fahrkosten.xls

	A	B	C	D	E	F	G
2		Fahrkosten-Simulation					
4		Fahrstrecke =	fs	500			
5		Stundenlohn =	lh	21			
6		Benzinpreis =	pb	1.35			
8		Parameter 1 =	fzk1	2.1			
9		Parameter 2 =	fzk2	0.021			
11		Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten	
12		80		13.90	5.56	186.17	
14		Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten	
15		87.000	0.1	13.05	5.75	185.94939	
16		87.100		13.08	5.74	185.94802	
17		87.200		13.11	5.73	185.94725	
18		87.300		13.13	5.73	185.94708	●
19		87.400		13.16	5.72	185.94753	
20		87.500		13.19	5.71	185.94857	
21		87.600		13.22	5.71	185.95023	
22		87.700		13.25	5.70	185.95248	
23		87.800		13.27	5.69	185.95534	
24		87.900		13.30	5.69	185.95880	
25		88.000		13.33	5.68	185.96286	
26		88.100		13.36	5.68	185.96753	
27		88.200		13.39	5.67	185.97280	
28		88.300		13.41	5.66	185.97867	
29		88.400		13.44	5.66	185.98514	
30		88.500		13.47	5.65	185.99221	
32					Minimum =	185.94708	

Tabelle3 / Tabelle4 / Tabelle5

Fahrkosten

	A	B	C	D	E	F	G
2		Fahrkosten-Simulation					
4		Fahrstrecke =	fs	500			
5		Stundenlohn =	lh	21			
6		Benzinpreis =	pb	1.35			
8		Parameter 1 =	fzk1	2.1			
9		Parameter 2 =	fzk2	0.021			
11		Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten	
12		80		11.27	6.25	187.59	
14		Geschw. (v)		Verbrauch (N)	Fahrzeit (t)	Kosten	
15		87.270	0.001	13.12616	5.7293	185.94707	
16		87.271		13.12644	5.7293	185.94707	
17		87.272		13.12671	5.7292	185.94707	
18		87.273		13.12699	5.7291	185.94707	
19		87.274		13.12726	5.7291	185.94707	
20		87.275		13.12754	5.7290	185.94707	
21		87.276		13.12782	5.7290	185.94707	
22		87.277		13.12809	5.7289	185.94707	●
23		87.278		13.12837	5.7288	185.94707	
24		87.279		13.12864	5.7288	185.94707	
25		87.280		13.12892	5.7287	185.94707	
26		87.281		13.12919	5.7286	185.94707	
27		87.282		13.12947	5.7286	185.94707	
28		87.283		13.12975	5.7285	185.94707	
29		87.284		13.13002	5.7284	185.94707	
30		87.285		13.13030	5.7284	185.94707	
32					Minimum =	185.94707	

Tabelle1 / Tabelle2 / Tabelle3 / Tabelle4

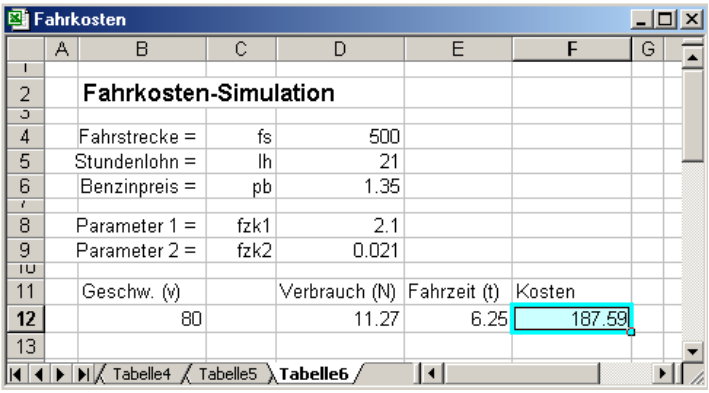
Die Lösung mit dem Solver

Dazu genügt das einfache Tabellenblatt mit den Eingabewerten und den Rechenvorschriften für den *Verbrauch*, die *Fahrzeit* und die *Kosten*.

Markieren Sie die Zelle F12 mit der Kostenberechnung und rufen Sie den Solver auf:

Menü: *Extras / Solver*

Sollte die Funktion Solver im Menü Extras nicht angezeigt werden, müssen Sie diese im Add-Ins-Manager erst aktivieren. Ist auch das nicht möglich müssen Sie das Setup für Excel durchführen und das Add-In für den Solver installieren.

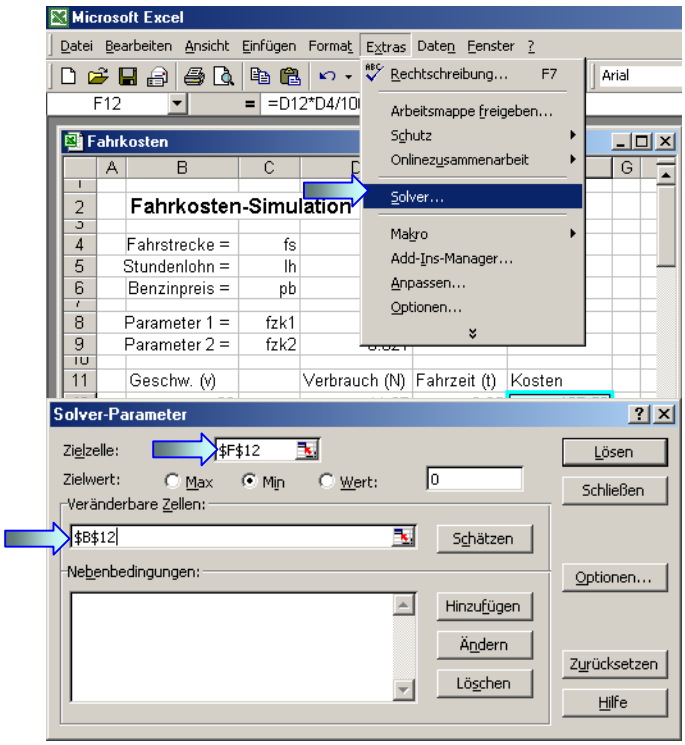


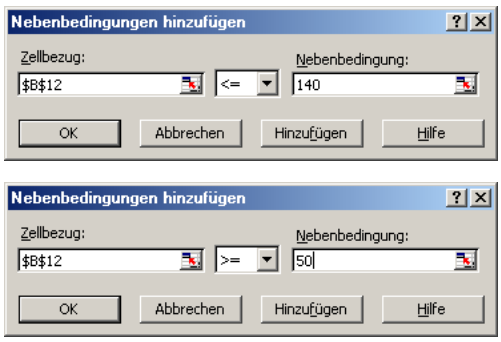
Nach dem Aufruf des Solvers werden Sie aufgefordert, die Solver-Parameter einzugeben. Da Sie die Zielzelle F12 bereits markiert haben, können Sie diese Eintragung belassen. Dann geben Sie an, dass der Zielwert ein Minimalwert ist, da wir ja die geringsten Kosten ermitteln wollen.

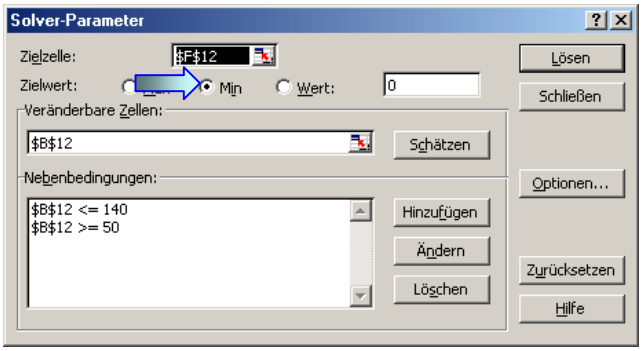
Als einzige veränderbare Grösse verwenden wir die Geschwindigkeit in Zelle B12. Setzen Sie also den Cursor in das Feld: Veränderbare Zellen und klicken Sie auf die Zelle B12. Die Zellen-Adresse erscheint dann automatisch (als absolute Adresse) im vorgesehen Feld.

Nun legen wir noch die Nebenbedingungen fest. Wenn Sie auf die Schaltfläche Hinzufügen klicken öffnet sich ein neues Dialog-Menü. Zuerst tragen wir ein, dass die Geschwindigkeit in der Zelle B12 <= 140 sein muss, und als weitere Nebenbedingung dass B12>= 50 sein soll.

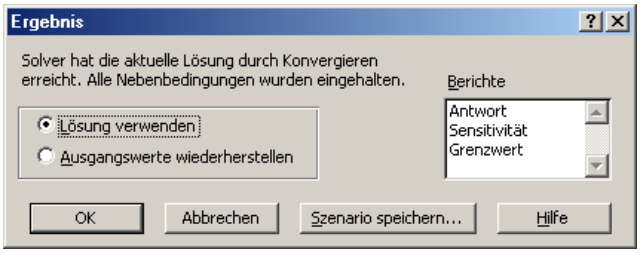
In diesem sehr einfachen Fall könnte man auf die Festlegung von Nebenbedingungen verzichten. Bei der Lösung von Gleichungen höheren Grades sind sie aber immer erforderlich.







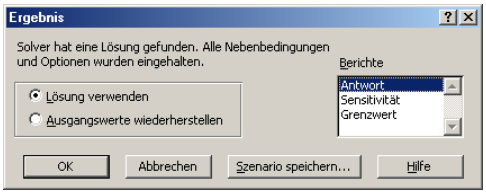
Wenn Sie jetzt auf die Schaltfläche Lösen klicken wird Ihnen der Solver bestätigen, dass er eine Lösung gefunden habe. Das eigentliche Ergebnis wird in einer separaten Tabelle als Bericht Antwort angezeigt.

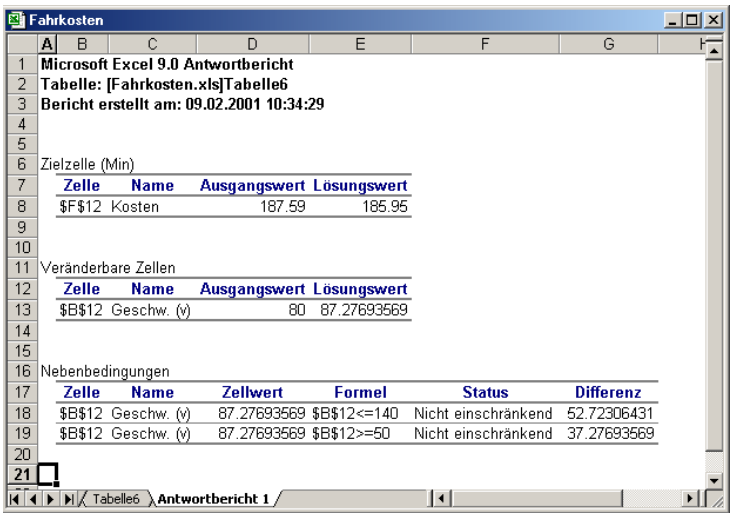


Bericht Antwort

Aus diesem Bericht können wir ablesen, dass die ***Minimal***-Kosten **185.95** betragen, wenn mit einer ***Geschwindigkeit*** von v = **87.27** km/h gefahren wird.

Schliesslich finden wir auch bestätigt, dass die Nebenbedingungen eingehalten wurden.





Fahrkosten

Microsoft Excel 9.0 Antwortbericht
Tabelle: [Fahrkosten.xls]Tabelle6
Bericht erstellt am: 09.02.2001 10:34:29

Zielzelle (Min)

Zelle	Name	Ausgangswert	Lösungswert
F12	Kosten	187.59	185.95

Veränderbare Zellen

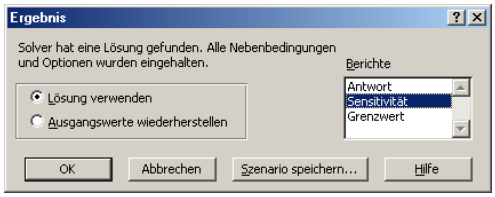
Zelle	Name	Ausgangswert	Lösungswert
B12	Geschw. (v)	80	87.27693569

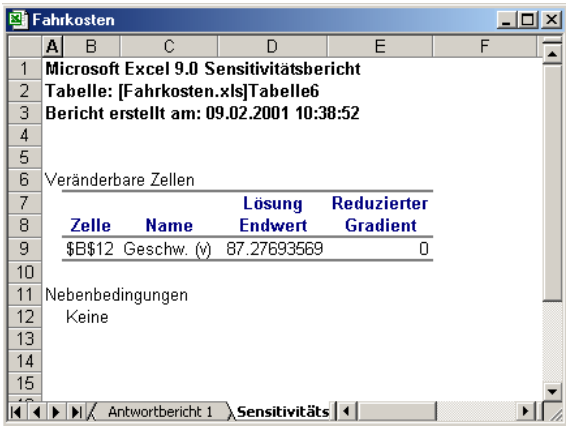
Nebenbedingungen

Zelle	Name	Zellwert	Formel	Status	Differenz
B12	Geschw. (v)	87.27693569	B12<=140	Nicht einschränkend	52.72306431
B12	Geschw. (v)	87.27693569	B12>=50	Nicht einschränkend	37.27693569

Tabelle6 / Antwortbericht 1

Bei komplexeren Berechnungen finden Sie im Sensitivitätsbericht nähere Angaben zur Näherungsmethode.





Fahrkosten

Microsoft Excel 9.0 Sensitivitätsbericht
Tabelle: [Fahrkosten.xls]Tabelle6
Bericht erstellt am: 09.02.2001 10:38:52

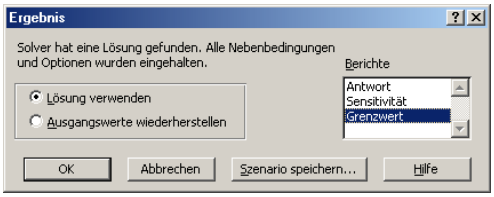
Veränderbare Zellen

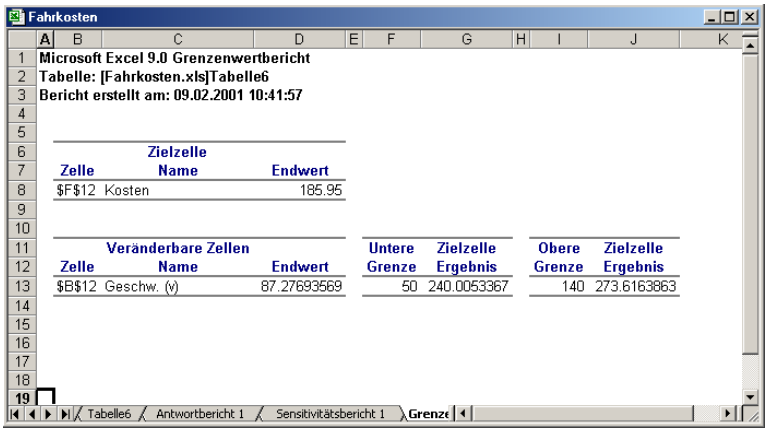
Zelle	Name	Lösung Endwert	Reduzierter Gradient
B12	Geschw. (v)	87.27693569	0

Nebenbedingungen
Keine

Antwortbericht 1 / Sensitivitäts

Auch der Grenzwertbericht gibt bei komplexeren Berechnungen Aufschluss, wie sich die gesuchte Grösse im Grenzbereich verhält.





Fahrkosten

Microsoft Excel 9.0 Grenzenwertbericht
Tabelle: [Fahrkosten.xls]Tabelle6
Bericht erstellt am: 09.02.2001 10:41:57

Zielzelle

Zelle	Name	Endwert
F12	Kosten	185.95

Veränderbare Zellen			Untere	Zielzelle	Obere	Zielzelle
Zelle	Name	Endwert	Grenze	Ergebnis	Grenze	Ergebnis
B12	Geschw. (v)	87.27693569	50	240.0053367	140	273.6163863

Tabelle6 / Antwortbericht 1 / Sensitivitätsbericht 1 / Grenze

Natürlich ist die Genauigkeit der hier berechneten Grössen nicht praxisgerecht.

Hier ging es ja in erster Linie darum, mit einer einfachen Problemstellung das prinzipielle Vorgehen zu zeigen. Wir werden später Probleme antreffen, wo die hohe Genauigkeit durchaus ihre Berechtigung haben wird.

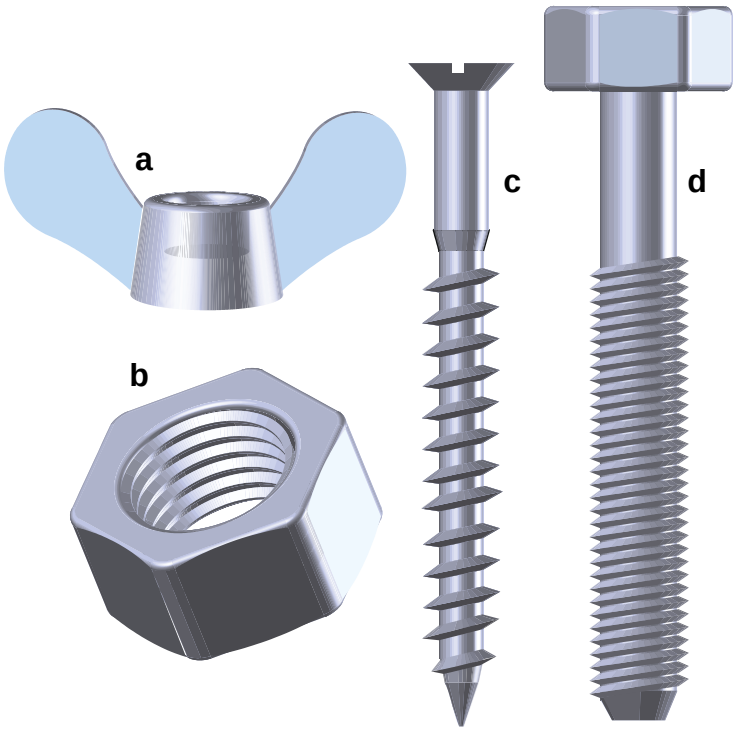
Lineare Gleichungssysteme

Bevor wir auch hier den ***Solver*** als Werkzeug zur Lösung linearer Gleichungssysteme einsetzen, wollen wir ein einfaches Beispiel nach der Determinantenmethode lösen. Ausgangslage sei die folgende Problemstellung:

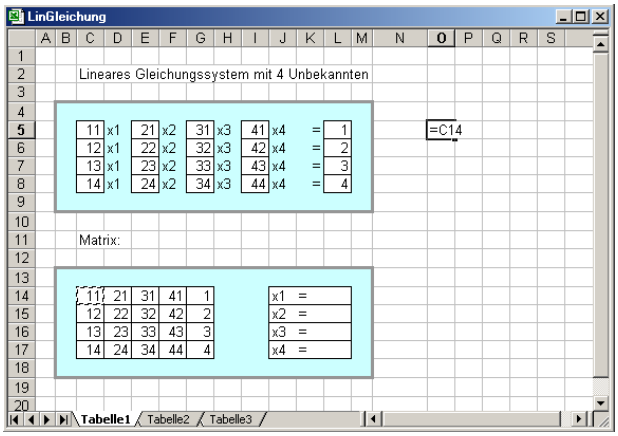
Im Materiallager liegen 4 Kisten mit nebenstehenden Werkstücken. Von jeder Kiste wissen wir, wieviele Teile jeder Sorte darin enthalten sind, und welches Gesamtgewicht sie haben. Wir kennen aber das Einzelgewicht der unterschiedlichen Sorten nicht. Dies gilt es nun herauszufinden.

Die Mathematik liefert dazu unterschiedliche Methoden, die Sie im Unterricht ausführlich besprechen werden. In jedem Falle werden wir den Sachverhalt mit 4 linearen Gleichungen beschreiben und danach die Unbekannten suchen, die diese Gleichung erfüllen:

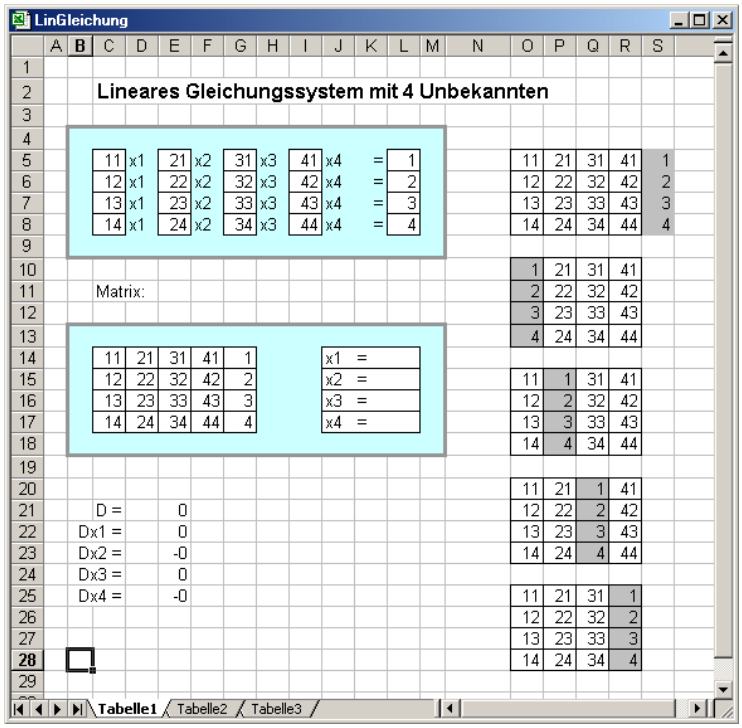
$$
\begin{aligned}
5a + 3b + 2c + 3d &= 111 \\
3a + 2b + 3c + d &= 67 \\
a + 4b + 5c + 2d &= 94 \\
4a + b + 4c + 4d &= 109
\end{aligned}
$$

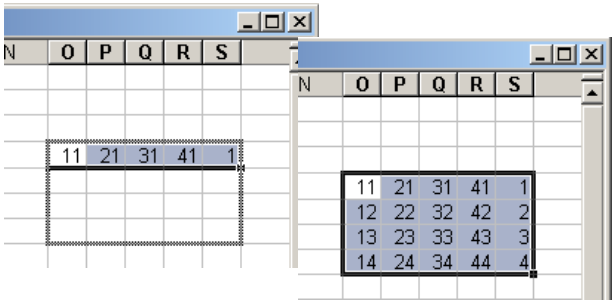


Steht zur Lösung der Aufgabe auch Excel zur Verfügung, so lässt sich diese Gleichung sehr einfach nach der Detreminanten-Methode lösen.



Die Koeffizienten-Matrix lässt sich leicht mit der Referenz: O5: =C14 nach rechts und nach unten ausfüllen.





Wie aus der Koeffizienten-Matrix die Determinanten zusammengestellt, wird im Lehrgang Mathematik mit Computern eingehen erläutert.

Zur Erstellung der Determinanten wiederholen Sie fünf mal die Referenzierung mit der Koeffizienten-Matrix. Für die 4 speziellen Determinanten ersetzen Sie jeweils eine der Spalten durch die Ergebnis-Spalte.

Die Koeffizienten wurden bewusst so gewählt, dass eine Kontrolle der Zellenverbindungen leichter möglich ist.

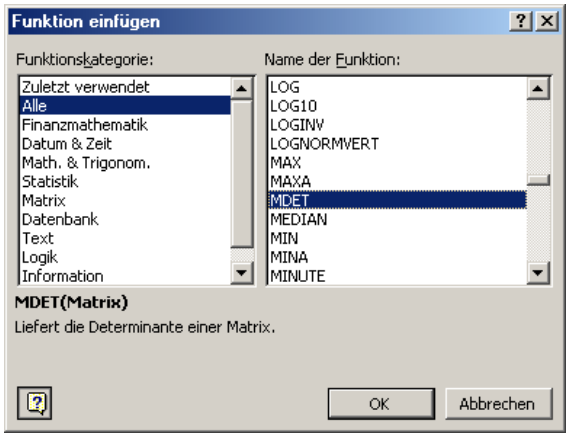
Die Cramersche Regel

Zur Lösung unserer Aufgabe ersetzen wir zuerst die Testgrössen durch die realen Koeffizienten unseres Gleichungssystems.

Dann bestimmen wir die fünf Determinanten mit der dafür vorgesehnenen Rechenvorschrift:

D21: =MDET(O5:R8)
D22: =MDET(O10:R13)
D23: =MDET(O15:R18)
D24: =MDET(O20:R23)
D25: =MDET(O25:R28)

Damit die (mehrstelligen) Ergebnisse überhaupt angezeigt werden können, verbinden wir jeweils zwei benachbarte Zellen.



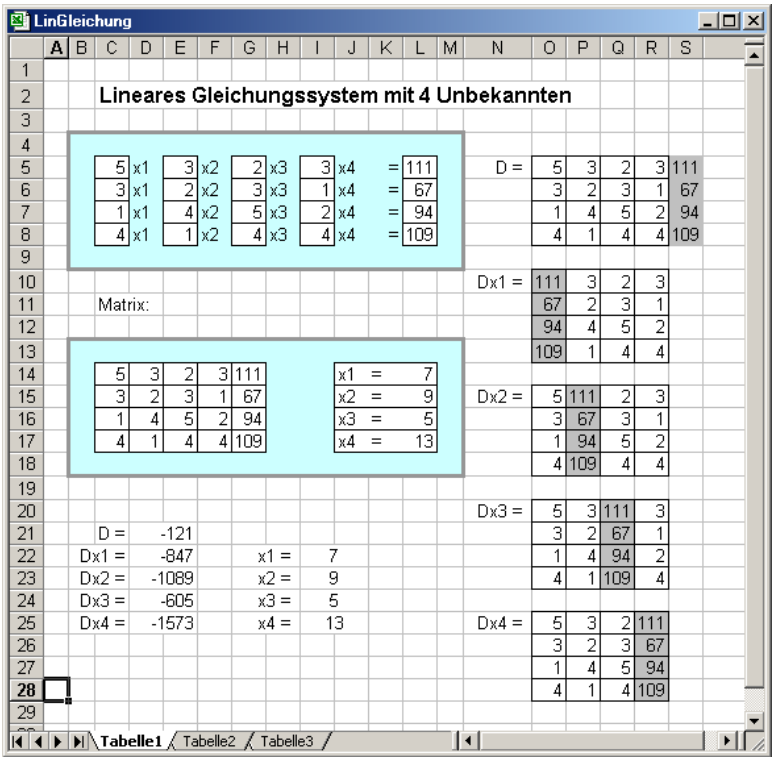
Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit der Cramerschen Regel:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}, \quad x_4 = \frac{D_{x_4}}{D}$$

Diese Ergebnisse werden in den Zellen I22 bis I25 berechnet und angezeigt.

Damit können wir nun leicht ablesen, dass die 4 Sorten folgendes Gewicht aufweisen:

Sorte a = 7 g
Sorte b = 9 g
Sorte c = 5 g
Sorte d = 13 g



Lösung mit dem Solver

Hier lohnt es sich, für die Variablen des Gleichungssystems Namen ein zu führen.

Dazu setzen wir in die Zellen B11 bis E11 die Buchstaben a, b, c und d. Bedenken Sie auch hier, dass Namen wie x1, x2 a11, a12 nicht zulässig sind, weil sie als Zellenadressen interpretiert werden könnten.

Zur Festlegung der Namen markieren wir den Bereich B11:E12, und wählen im

Menü: *Einfügen* / *Name* / *Erstellen*

Dort präzisieren wir noch, dass die Namen aus der *obersten Zeile* zu entnehmen sind.

Jetzt können wir alle Variablen 0 setzen und die erste Gleichung unseres Gleichungs-systems in die Zelle F12 eintragen.

Die drei andern Gleichungen liefern die Nebenbedingungen. Diese tragen wir in die Zellen F15 bis F17 ein.

Damit die Rechenvorschriften sichtbar sind wurde ein Leerzeichen (Text) vorangestellt. Als echte Rechenvorschriften sind sie natürlich unsichtbar.

Nun rufen wir den Solver auf:

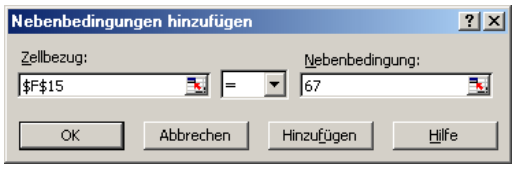
Menü: *Extras* / *Solver*

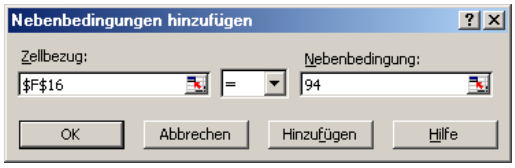
und tragen die Solver-Parameter ein:

Zielzelle ist die Zelle F12, die als Zielwert den Wert 111 erhalten muss.

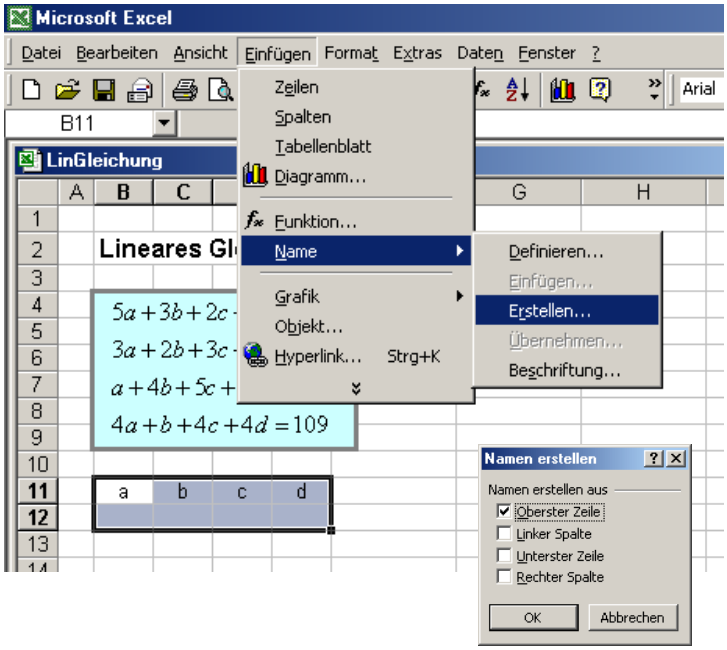
Die veränderbaren Zellen sind unsere vier Variablen in den Zellen B12:E12.

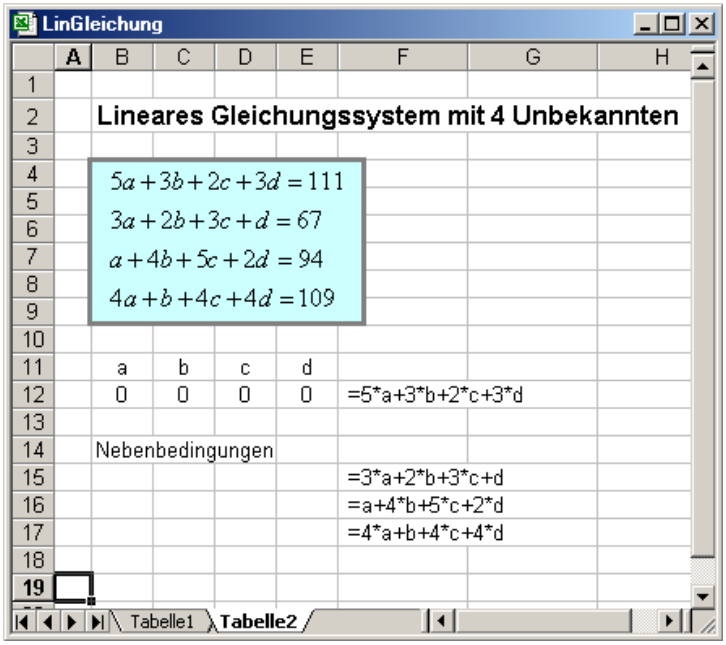
Nun müssen wir noch die Nebenbedingungen hinzufügen:

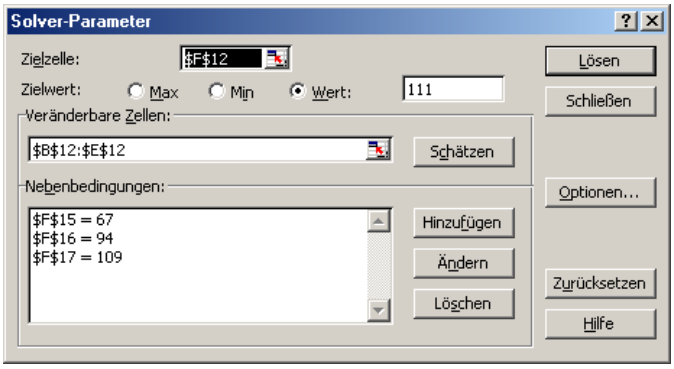




Jetzt müssen wir nur noch auf die Schaltfläche *Lösen* klicken...







Nach kurzer Zeit wird das Ergebnis angezeigt.

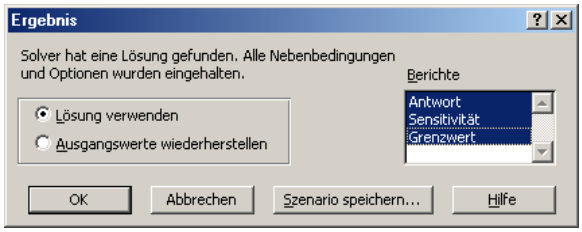
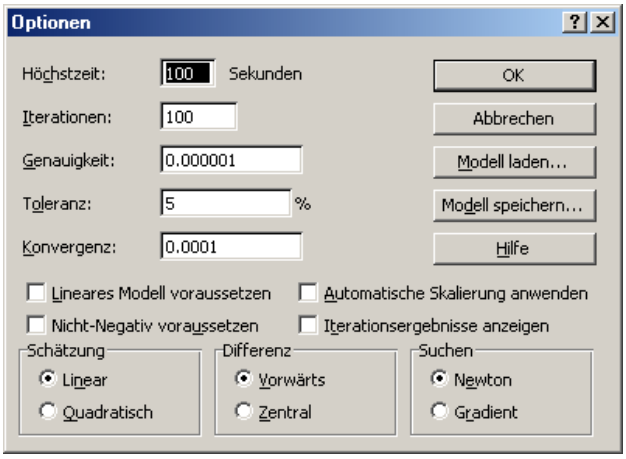
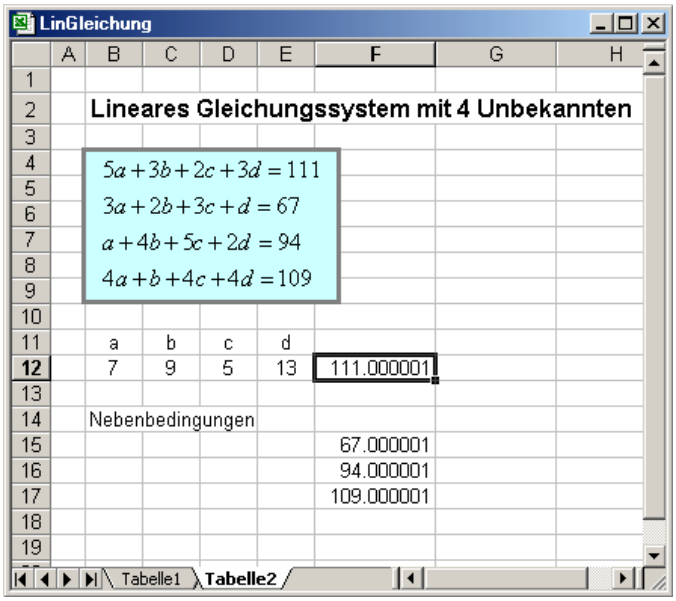
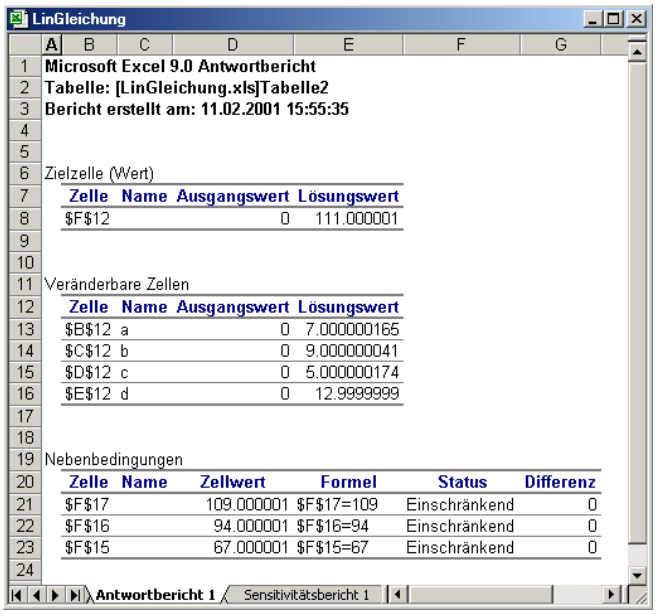
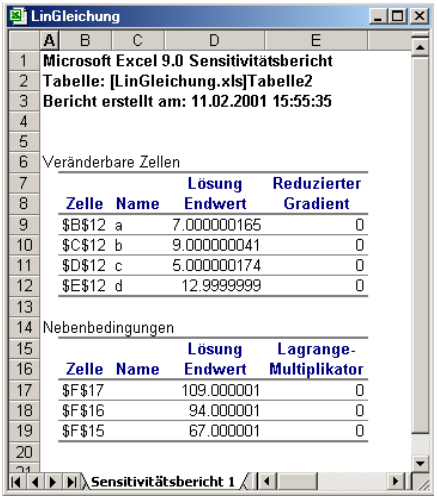
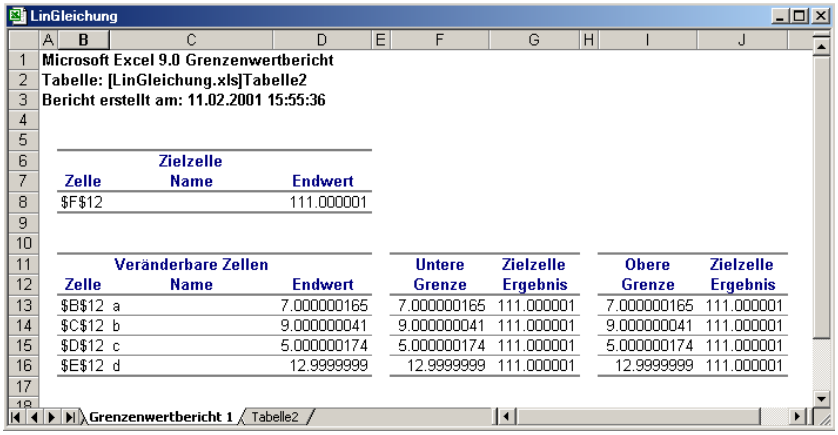
Was hat der Solver eigentlich gemacht?

Er hat einfach in einem iterativen Verfahren Zahlenwerte gesucht, die die Gleichungen erfüllen.

Als Iteration versteht man ein schrittweises Rechenverfahren zur Annäherung an die exakte Lösung. Dabei werden für die Variablen Werte eingesetzt und solange verändert, bis die Zielwerte möglichst genau erreicht werden.

Der Computer löst die Aufgabe also einfach durch (geschicktes) Probieren. Etwas primitiv, aber weil er so schnell ist halt doch sehr wirkungsvoll!

Wollen wir etwas mehr über die vom Solver gefundenen Lösung erfahren, können wir uns einen oder mehrere Berichte (Ctrl-Taste) erstellen lassen.



Falls erforderlich könnten wir unter Optionen noch Angaben machen, wie lange und wie genau das Verfahren durchgeführt werden soll.